*** 学术论文 ***

可控排序问题的凸二次规划松弛近似算法*

张 峰** 唐国春

上海第二工业大学应用数学系，上海 200041

摘要 用凸二次规划松弛方法，研究工件加工时间可控的，使加工时间压缩费用与加权总完工时间之和为最小的排序问题，得到界为 3/2 的多项式时间近似算法.

关键词 二次规划 可控排序 近似算法

20 世纪 90 年代以来，用线性规划、二次规划和半定规划等数学规划方法来研究组合优化问题(包括排序问题)得到了不少新的成果. 1995 年 Goemans 等[1]把图论中最大割问题松弛成为半定规划，再用随机化方法对这个问题提出近似算法，使得到的近似算法的界由原来的 0.5 达到 0.651. 1998 年 Skutella[2]把平行机排序中的 NP 难题 $P \parallel \sum w_jC_j$ 和 $R \parallel \sum w_jC_j$ 表述成二次的 0-1 整数规划问题，然后将其松弛成为凸的二次规划. 在求得凸的二次规划的最优解(它有多项式时间的算法)后，再用随机化方法来构造原问题 $P \parallel \sum w_jC_j$ 和 $R \parallel \sum w_jC_j$ 的近似解，从而得到令人满意的结果. Skutella 在这篇论文中还用半定规划对问题 $R2 \parallel \sum w_jC_j$ 得到界为 1.2572 的近似算法.

用凸二次规划松弛的方法研究加工时间可控的排序问题. 设有 n 个工件 $\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$，工件 J_j 的加工时间为 p_j，工件的加工时间可以压缩，最大的压缩量为 $u_j(u_j \leqslant p_j)$，单位压缩费用为 c_j. 用 $t_j(0 \leqslant t_j \leqslant u_j)$ 表示工件 J_j 加工时间的压缩量，用 P_j 表示工件 J_j 的实际加工时间，则 $P_j = p_j - t_j$. 记工件 J_j 的完工时间为 C_j，工件 J_j 的权为 w_j. 考虑的目标函数是加工时间的压缩费用与加权总完工时间之和，即 $F(t,s) = \sum_{j=1}^{n} c_jt_j + \sum_{j=1}^{n} w_{s(j)}C_{s(j)}$，其中 $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是工件加工时间的压缩向量，$s = (s(1), s(2), \cdots, s(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列，表示工件加工的次序. 加工时间可控的排序问题是要寻求一组 (t,s) 使 $F(t,s)$ 为最小. 用三参数的方法，这个问题可以表示为 $1 \mid \mathrm{cpt} \mid \sum w_jC_j + \sum c_jt_j$，这里 cpt 代表“加工时间可控(controllable processing times)”. Vickson[3]最早讨论了这个问题. 此问题被证明是 NP 难题[4].

设 $T = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \mid 0 \leqslant t_j \leqslant u_j, j = 1, 2, \cdots n\}$，即 T 是工件加工时间的压缩向量的全体，再用 S 表示 $(1,2,\cdots,n)$ 的所有排列，则所研究的问题可写成

2001-03-23 收稿，2001-05-22 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：19771057)

** E-mail: gtang@public1.sta.net.cn

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases}\min F(t,s) = \sum_{j=1}^{n} c_j t_j + \sum_{j=1}^{n} w_{s(j)} C_{s(j)}, \\ \text{s.t. } (t,s) \in T \times S.\end{cases}$$

Vickson[3]证明,对问题(P)存在这样的一个最优解,其中 $t_j=0$ 或 u_j,即 $P_j=p_j$ 或 p_j-u_j,在求解最优解过程中确定工件 J_j 的实际加工时间时只需考虑两种情况 $P_j=p_j$ 和 p_j-u_j. 如果 $P_j=p_j$(即 $t_j=0$),称工件 J_j 是不压缩的;如果 $P_j=p_j-u_j$(即 $t_j=u_j$),称工件 J_j 是压缩的. 对于确定的向量 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,目标函数 $F(t,s)$ 中 $\sum_{j=1}^{n} c_j t_j$ 的值与工件的次序 $s=(s(1),s(2),\cdots,s(n))$无关,而 $\sum_{j=1}^{n} w_{s(j)} C_{s(j)}$ 的值由 Smith 法则知道当工件次序 $s=(s(1),s(2),\cdots,s(n))$是 WSPT 序 $\left(\text{即}\frac{P_{s(1)}}{w_{s(1)}} \leqslant \frac{P_{s(2)}}{w_{s(2)}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{P_{s(n)}}{w_{s(n)}}\right)$ 时为最小. 因此,最优解(t,s)只需在可行解范围中寻找,所谓可行解(t,s)是指向量 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$的分量 $t_j=0$ 或 u_j,且工件次序 $s=(s(1),s(2),\cdots,s(n))$是向量 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$所对应的实际加工时间的 WSPT 序.

1 二次规划

对于工件 $J_j(j=1,2,\cdots,n)$引入两个变量, $x_j=\begin{cases}1, & \text{工件 } J_j \text{ 压缩} \\ 0, & \text{工件 } J_j \text{ 不压缩}\end{cases}$, $x_{n+j}=\begin{cases}1, & \text{工件 } J_j \text{ 不压缩} \\ 0, & \text{工件 } J_j \text{ 压缩}\end{cases}$,显然 $x_j+x_{n+j}=1$. 这样压缩向量 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$(在可行解范围内)的取值与向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})^{\mathrm{T}}$(满足 $x_j+x_{n+j}=1(j=1,2,\cdots n)$)的取值是一一对应的.

因为一个工件对应加工时间压缩与不压缩两种状态,把工件 $J_j(j=1,2,\cdots,n)$看成两个工件,一个仍记为 J_j,加工时间 $P_j=p_j-u_j$;另一个记为 J_{n+j},加工时间 $P_{n+j}=p_j$. 这 $2n$ 个工件的 WSPT 序记为 $\sigma=(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(2n))$,即$\frac{P_{\sigma(1)}}{w_{\sigma(1)}} \leqslant \frac{P_{\sigma(2)}}{w_{\sigma(2)}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{P_{\sigma(2n)}}{w_{\sigma(2n)}}$. 对于任意可行解$(t,s)$,工件次序 s 一定是排序 σ 的一个子排序. 记 $C_{\sigma(j)}=\sum_{i=1}^{j-1} P_{\sigma(i)} x_{\sigma(i)}+P_{\sigma(j)}$,这样所讨论的问题归纳成如下整数二次规划

$$(\mathrm{IQP})\begin{cases}\min f_{\mathrm{IQP}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)} C_{\sigma(j)} x_{\sigma(j)} \\ \qquad = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}\left(\sum_{i=1}^{j-1} P_{\sigma(i)} x_{\sigma(i)} + P_{\sigma(j)}\right) x_{\sigma(j)}, \\ \text{s.t. } x_j + x_{n+j} = 1 (j=1,2,\cdots,n), \quad x_j \in \{0,1\} (j=1,2,\cdots,2n).\end{cases}$$

问题(P)的可行解(t,s)可转化为(IQP)的可行解 $\boldsymbol{x}$,反之也一样,且 $F(t,s)=f_{\mathrm{IQP}}(x)$成立,因此得到求解(IQP)的近似算法就有了求解(P)的近似算法.

把(IQP)中 $x_j \in \{0,1\}$ 松弛为 $x_j \geqslant 0$ 得到下列二次规划

$$(\mathrm{QP})\begin{cases}\min f_{\mathrm{QP}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)} C_{\sigma(j)} x_{\sigma(j)} \\ \qquad = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)} \Big(\sum_{i=1}^{j-1} P_{\sigma(i)} x_{\sigma(i)} + P_{\sigma(j)} \Big) x_{\sigma(j)}, \\ \text{s.t. } x_j + x_{n+j} = 1 (j = 1,2,\cdots,n), \quad x_j \geqslant 0 (j = 1,2,\cdots,2n).\end{cases}$$

对(QP)任意一个的可行解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{2n})$，用下面随机化方法得到一个(IQP)的可行解：以概率 $\bar{x}_j$ 取 $x_j^* = 1$(即工件 J_j 压缩)、以概率 $\bar{x}_{n+j} = 1 - \bar{x}_j$ 取 $x_j^* = 0$(即工件 J_j 不压缩)($j = 1,2,\cdots,n$)，令 $x_{n+j}^* = 1 - x_j^* (j = 1,2,\cdots,n)$，这样得到 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{2n}^*)$ 是(IQP)的可行解. 显然 x_j^* 的数学期望 $E(x_j^*) = \bar{x}_j (j = 1,2,\cdots,2n)$，$x_j^*$ 与 $x_i^* (i \neq n+j)$ 是独立的，所以 $E(x_j^* x_i^*) = E(x_j^*) E(x_i^*) = \bar{x}_j \bar{x}_i$，又 $E(x_j^* x_{n+j}^*) = E(x_j^*(1 - x_j^*)) = 0 \leqslant \bar{x}_j (1 - \bar{x}_j) = \bar{x}_j \bar{x}_{n+j}$，因此得到

引理 1　给定(QP)的一个可行解 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{2n})$，用随机化方法得到一个(IQP)的可行解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{2n}^*)$ 所得到的函数值 $f_{\mathrm{IQP}}(x^*)$ 的数学期望成立

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(\boldsymbol{x}^*)) \leqslant f_{\mathrm{QP}}(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

如果 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{2n})$ 是(QP)的一个最优解，根据引理 1 的结果，至少有一个随机选择的(IQP)的可行解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^* x_2^*, \cdots, x_{2n}^*)$ 满足 $f_{\mathrm{IQP}}(\boldsymbol{x}^*) \leqslant E(f_{\mathrm{IQP}}(\boldsymbol{x}^*)) \leqslant f_{\mathrm{QP}}(\bar{\boldsymbol{x}})$，同时(IQP)的可行解一定是(QP)的可行解，可得到如下

定理 1　(IQP)的最优值与(QP)的最优值相等. 并且给定(QP)的一个最优解 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{2n})$，(IQP)的一个最优解 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{2n}^*)$ 可以用如下方法得到：若 $\bar{x}_j = 1$ 或 0，则 $x_j^* = 1$ 或 0，若 $0 < \bar{x}_j < 1$，则 $\boldsymbol{x}_j^*$ 可以任意取值 0 与 1，令 $x_{n+j}^* = 1 - x_j^* (1,2,\cdots,n)$.

2　凸二次规划松弛

通过计算可得到

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{QP}}(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)} \Big(\sum_{i=1}^{j-1} P_{\sigma(i)} x_{\sigma(i)} + P_{\sigma(j)} \Big) x_{\sigma(j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)} P_{\sigma(j)} x_{\sigma(j)} + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} D x, \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & w_{\sigma(2)} P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(3)} P_{\sigma(1)} & \cdots & w_{\sigma(2n)} P_{\sigma(1)} \\ w_{\sigma(2)} P_{\sigma(1)} & 0 & w_{\sigma(3)} P_{\sigma(2)} & \cdots & w_{\sigma(2n)} P_{\sigma(2)} \\ w_{\sigma(3)} P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(3)} P_{\sigma(2)} & 0 & \cdots & w_{\sigma(2n)} P_{\sigma(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{\sigma(2n)} P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(2n)} P_{\sigma(2)} & w_{\sigma(2n)} P_{\sigma(3)} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{x} = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(2n)})^{\mathrm{T}}$，注意这与前面的 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})^{\mathrm{T}}$ 表示的意思是一样的，只在分量次序上是不相同的.

要使二次函数 $f_{\mathrm{QP}}(x)$ 是凸的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是半正定的，因此需对 $\boldsymbol{D}$ 进行变化.

当 $x_j\in\{0,1\}(j=1,2,\cdots,2n)$时,$x_j=x_j^2$,这样

$$\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)}^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} w_{\sigma(1)}P_{\sigma(1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{\sigma(2)}P_{\sigma(2)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_{\sigma(3)}P_{\sigma(3)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(2n)} \end{pmatrix}.$$

所以当 $x_j\in\{0,1\}(j=1,2,\cdots,2n)$时,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{x}.$$

设 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Lambda}$

$$= \begin{pmatrix} w_{\sigma(1)}P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(2)}P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(3)}P_{\sigma(1)} & \cdots & w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(1)} \\ w_{\sigma(2)}P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(2)}P_{\sigma(2)} & w_{\sigma(3)}P_{\sigma(2)} & \cdots & w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(2)} \\ w_{\sigma(3)}P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(3)}P_{\sigma(2)} & w_{\sigma(3)}P_{\sigma(3)} & \cdots & w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(1)} & w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(2)} & w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(3)} & \cdots & w_{\sigma(2n)}P_{\sigma(2n)} \end{pmatrix},$$

由下面的引理可得矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是半正定的,所以考虑目标函数为

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}.$$

引理2 设 $a_j>0, b_j>0(j=1,2,\cdots,k)$,如果 $\frac{b_1}{a_1}\leqslant\frac{b_2}{a_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{b_k}{a_k}$,则$|A_k|\geqslant 0$,其中

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_kb_1 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_kb_2 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_kb_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_kb_1 & a_kb_2 & a_kb_3 & \cdots & a_kb_k \end{pmatrix}.$$

从而矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的各阶主子式都大于等于零,所以矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是半正定的.

证

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_kb_1 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_kb_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1}b_1 & a_{k-1}b_2 & a_{k-1}b_3 & \cdots & a_kb_{k-1} \\ a_kb_1 & a_kb_2 & a_kb_3 & \cdots & a_kb_k \end{vmatrix} = a_kb_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_kb_1 \\ a_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_kb_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1} & a_{k-1}b_2 & a_{k-1}b_3 & \cdots & a_kb_{k-1} \\ 1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_k \end{vmatrix}$$

$$= a_kb_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2b_1 - a_1b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & \cdots & a_kb_1 - a_1b_k \\ a_2 & 0 & a_3b_2 - a_2b_3 & \cdots & a_kb_2 - a_2b_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & a_kb_{k-1} - a_{k-1}b_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_kb_1 \prod_{i=1}^{k-1} (a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i) \geqslant 0,$$

下面给出凸二次规划松弛

$$(\mathrm{CQP})\begin{cases} \min f_{\mathrm{CQP}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_ju_jx_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}x_{\sigma(j)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}. \\ \mathrm{s.t.}\ x_j + x_{n+j} = 1(j = 1,2,\cdots,n),\ x_j \geqslant 0(j = 1,2,\cdots,2n). \end{cases}$$

因为当 $x_j \in [0,1](j=1,2,\cdots,2n)$ 时 $x_j^2 \leqslant x_j$，所以 $f_{\mathrm{CQP}}(x) \leqslant f_{\mathrm{QP}}(x)$. 用 f_{IQP}^* 表示(IQP)的最优值，用 f_{QP}^* 表示(QP)的最优值，则有

定理 2　给定(CQP)的最优解 $\bar{x}$，用上述随机化方法得到(IQP)的可行解 $\boldsymbol{x}^*$，则

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^*)) \leqslant 2f_{\mathrm{IQP}}^*.$$

证　显然 $\bar{x}$ 是(QP)的可行解，由引理 1 得

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^*)) \leqslant f_{\mathrm{QP}}(\bar{x}) = f_{\mathrm{CQP}}(\bar{x}) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}\bar{x}_{\sigma(j)} - \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}\Big),$$

由 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}} \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} c_ju_j\bar{x}_j \geqslant 0$，得 $f_{\mathrm{CQP}}(\bar{x}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}\bar{x}_{\sigma(j)}$，又 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} \geqslant 0$，所以

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^*)) \leqslant 2f_{\mathrm{CQP}}(\bar{x}) \leqslant 2f_{\mathrm{QP}}^* = 2f_{\mathrm{IQP}}^*.$$

因为整数二次规划(IQP)与排序问题(P)等价，所以(IQP)可行解 $\boldsymbol{x}^*$ 转化为(P)的可行解 (t^*, s^*)，由于凸二次规划是多项式时间可解的，从而得到

定理 3　给定(CQP)的最优解 $\bar{x}$，利用上述随机化方法得到问题(P)的可行解是求解问题(P)的界为 2 的多项式时间近似算法.

定理 2 的证明过程中用到了不等式 $f_{\mathrm{CQP}}(\bar{x}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}\bar{x}_{\sigma(j)}$，但是不等式 $f_{\mathrm{CQP}}(\bar{x}) \geqslant \sum_{j=1}^{2n} w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}\bar{x}_{\sigma(j)}$ 仅当 $\bar{x}$ 的分量取 0 或 1 成立，在(CQP)中增加这一约束，可得凸规划

$$
(\mathrm{VP})\begin{cases}\min f_{\mathrm{VP}}(x,z)=z,\\ \mathrm{s.t.}\ z\geqslant\sum_{j=1}^{n}c_j u_j x_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}w_{\sigma(i)}P_{\sigma(i)}x_{\sigma(i)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x},\\ z\geqslant\sum_{i=1}^{2n}w_{\sigma(i)}P_{\sigma(i)}x_{\sigma(i)},\\ x_j+x_{n+j}=1(j=1,2,\cdots,n),\quad x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n).\end{cases}
$$

很显然(VP)的最优值 $f_{\mathrm{VP}}^{*}\leqslant f_{\mathrm{IQP}}^{*}$. 对于上述凸规划,给定任意误差 $\varepsilon>0$,可以在多项式时间得到一可行解使其目标函数值与最优值的差小于 ε[5].

定理 4 给定(VP)的可行解$(\bar{x},\bar{z})$,用上述随机化方法得到(IQP)的可行解 x^{*},则

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^{*}))\leqslant\frac{3}{2}\bar{z}.$$

证 显然 $\bar{x}$ 是(QP)的可行解,由引理 1 得

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^{*}))\leqslant f_{\mathrm{QP}}(\bar{x})=f_{\mathrm{CQP}}(\bar{x})+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{2n}w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}\bar{x}_{\sigma(j)}-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\bar{\boldsymbol{x}}\Big),$$

因为 $f_{\mathrm{CQP}}(\bar{x})\leqslant\bar{z}$, $\sum_{j=1}^{2n}w_{\sigma(j)}P_{\sigma(j)}\bar{x}_{\sigma(j)}\leqslant\bar{z}$, 又 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\bar{\boldsymbol{x}}\geqslant 0$,所以

$$E(f_{\mathrm{EQP}}(x^{*}))\leqslant\frac{3}{2}\bar{z}.$$

定理 5 计算(VP)的一个次最优解$(\bar{x},\bar{z})$ $\left(满足 f_{\mathrm{VP}}(\bar{x},\bar{z})=\bar{z}<f_{\mathrm{VP}}^{*}+\frac{1}{3}\right)$,用上述随机化方法得到(IQP)的可行解 $\boldsymbol{x}^{*}$,则

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^{*}))<\frac{3}{2}f_{\mathrm{IQP}}^{*}.$$

即用上述随机化方法得到问题(P)的可行解是求解其界为 3/2 的多项式时间近似算法.

证 由定理 4 得

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^{*}))\leqslant\frac{3}{2}\bar{z}<\frac{3}{2}f_{\mathrm{VP}}^{*}+\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}f_{\mathrm{IQP}}^{*}+\frac{1}{2},$$

由于所有工件的参数都是整数,所以

$$E(f_{\mathrm{IQP}}(x^{*}))\leqslant\frac{3}{2}f_{\mathrm{IQP}}^{*}.$$

参 考 文 献

1 Goemans M X, et al. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. Journal of Association for Computing Machinery, 1995, 42: 1115

2 Skutella M. Semidefinite relaxations for parallel machine scheduling. Proceedings of the 39th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, November, 1998. 472

3 Vickson R G. Choosing the job sequence and processing times to minimize total processing plus flow cost on single machine. Operations Research, 1980, 28: 1155

4 Chen Bo, et al. A review of machine scheduling: Complexity algorithms and approximability, Handbook of Combinatorial Optimization. Du D Z, et al. eds. Kluwer: Academic Publishers, 1998. 21 ~ 169

5 Grötschel M, et al. Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, volume 2 of Algorithms and Combinatorics. Berlin, Springer, 1988